**Theorem.** *Let $(M,g)$ be a complete Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature. Then every infinitesimal harmonic transformation with finite kinetic energy is parallel. If, in addition, the volume of $(M,g)$ is infinite or the Ricci curvature is negative at some point of $(M,g)$, then the infinitesimal harmonic transformation is identically zero.*

The triplet $(g,\xi,\lambda)$ is called a Ricci soliton on a manifold $M$ (see [3, p. 22]) if the Ricci tensor $Ric$ of $g$ satisfies the equation $-2Ric = L_\xi g + 2\lambda g$ where $L_\xi g$ is the *Lie derivative* of $g$ with respect to $\xi$ and $\lambda$ is a constant. Moreover, the vector field $\xi$ of a Ricci soliton $(g,\xi,\lambda)$ is an infinitesimal harmonic transformation of the manifold $(M,g)$ (see [4]). Therefore, the following corollary holds.

**Corollary.** *Let $(g,\xi,\lambda)$ be a Ricci soliton with complete Riemannian metric g such that the Ricci curvature of g is nonpositive and the kinetic energy of the flow generated by $\xi$ is finite, then $(g,\xi,\lambda)$ is not shrinking. If, in addition, $(g,\xi,\lambda)$ is steady then g is a Ricci-flat metric and if $(g,\xi,\lambda)$ is expanding then it is trivial.*

Our work was supported by RBRF grant 16-01-00053-a (Russia).

## References

1. Stepanov S. E., Shandra I. G. *Geometry of infinitesimal harmonic transformation*// Annals of Global Analysis and Geometry –2003. –V. 24. – C. 291–29.

2. Arnold V. I., Kresin B. A. *Topological methods in hydrodynamics* // Springer-Verlag, New York –1998.

3. Chow B., Knopf D. *The Ricci flow: An introduction* // American Mathematical Society, Providence –2004.

4. Stepanov S. E., Shelepova V. N. *A note on Ricci soliton* // Mathematical Notes –2009. –V. 86. – № 3. – C. 447–450.

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОЛНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С.Е. Степанов, И.И. Цыганок

*Доказывается, что каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование с конечной энергией на полном римановом многообразии с неположительной кривизной Риччи является параллельным векторным полем. Дается приложение этого утверждения в теории солитонов Риччи*

**Ключевые слова**: Полное риманово многообразие, инфинитезимальное гармоническое преобразование, солитон Риччи.

УДК 514.763

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА И *H*-ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА {221}

А.В. Аминова[1], Д.Р. Хакимов[2]

1 *asya.aminova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *dzhamoliddink@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В данной работе с помощью метода косонормального репера (Аминова) интегрируются уравнения Эйзенхарта и находятся пятимерные $h$-пространства типа* $\{221\}$.

**Ключевые слова**: Уравнение Эйзенхарта, пятимерное псевдориманово многообразие, $h$-пространство типа $\{221\}$.

Уравнение Эйзенхарта

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi \quad (Y,Z,W \in TM),$$

где $h$ – симметричная билинейная форма, заданная на псевдоримановом многообразии $(M,g)$ с метрикой $g$ и связностью Леви–Чивита $\nabla$, возникает в геометрии при рассмотрении проблемы геодезических отображений, проективных преобразований, пространств с квадратичным первым интегралом уравнений геодезических и др. Уравнение Эйзенхарта линейно по $h$ и нелинейно по $g$ в силу нелинейной зависимости $\nabla$ от $g$. В общей постановке все величины в этом уравнении оказываются неизвестными, и для нахождения пространств, допускающих нетривиальные решения $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, и самих этих решений пространства разбиваются на типы в соответствии с алгебраической структурой тензора $h$, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре $\chi$ тензора $h$. Тип тензора ð определяет тип метрики $g$ в области $V$; такие метрики называются *$h$-метриками типа $\chi$*, а соответствующие пространства – *$h$-пространствами типа $\chi$*.

В данной работе с помощью метода косонормального репера [1] определяются пятимерные $h$-пространства типа $\{221\}$. Доказано, в частности, что метрика $g$ такого пространства и соответствующее решение $h$ уравнения Эйзенхарта в подходящей системе координат $(x,U)$ приводятся к виду:

$$g = e_1(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)g_1 + e_2(f_1-f_2)^2(f_3-f_2)g_2 + e_3(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^2 g_3, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} h = 2\varphi\, g + f_1\left(g_1+\Lambda_1\right) + f_2\left(g_2+\Lambda_2\right) + f_3\, g_3, \\ \varphi = f_1+f_2+(1/2)f_3, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} g_1\big|_U = A\left(2dx^1dx^2 - A\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)(dx^2)^2\right), \\ g_2\big|_U = B\left(2dx^3dx^4 - B\left(\frac{2}{f_1-f_2}+\frac{1}{f_3-f_2}\right)(dx^4)^2\right), \quad g_3\big|_U = (dx^5)^2, \\ \Lambda_1|_U = A^2(dx^2)^2, \quad \Lambda_2\big|_U = B^2(dx^4)^2, \end{gathered} \tag{3}$$

здесь $f_1 = x^2,\ f_2 = x^4,\ A = x^1+\tau(x^2),\ B = x^3+\omega(x^4)$ ($h$-пространство $\mathbf{H_{221,1}}$) либо $f_1 = x^2,\ f_2 = c_2 = \text{const},\ A = x^1+\tau(x^2),\ B = 1$, ($h$-пространство $\mathbf{H_{221,2}}$) либо $f_1 = c_1 = \text{const},\ f_2 = c_2 = \text{const},\ A = B = 1$, ($h$-пространство $\mathbf{H_{221,3}}$) либо, наконец, $f_1 = c_1 = \text{const},\ f_2 = x^4,\ A = 1,\ B = x^3+\omega(x^4)$,[1] $e_1, e_2$ равны $\pm 1$, $\tau$ – функция $x^2$, $\omega$ – функция $x^4$, $f_3$ – функция $x^5$.

## Литература

1. Аминова А. В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* –М.:Янус-К, 2003 – 619 с.

1 Последний случай сводится ко второму случаю переобозначением $f_1 \leftrightarrow f_2$, $x^1 \leftrightarrow x^3$, $x^2 \leftrightarrow x^4$, $A \leftrightarrow B$, $\tau \leftrightarrow \omega$.

2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН –1995. –Т. 50. –№ 1. –С. 69–142.

3. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. *О проективных движениях пятимерных пространств специального вида* // Изв. вузов. Матем. –2017. –Т.5 –С. 1–6.

ON INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATION AND $H$-SPACES OF THE TYPE {221}

A.V. Aminova, D.R. Khakimov

*In this paper, using the method of skew-normal frame (Aminova), the Eisenhart equations are integrated and five-dimensional $h$-spaces of the type {221} are determined.*

**Keywords**: Eisenhart equation, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, $h$-space of the type {221}.

УДК 514.744.2

## ОБ АЛЬТЕРНАТИВНО-ЭЛАСТИЧНЫХ АЛГЕБРАХ ПРИ N MOD 8 =0

К.В. Андреев[1]

1 *krit_ufa@mail.ru*; Уфа

*В статье обсуждается связь между алгебрами Клиффорда, спинорной алгеброй и алгебрами гиперкомплексных чисел, основанная на периодичности Ботта и принципе тройственности Картана и влияние этих аспектов на физическую составляющую пазла.*

**Ключевые слова**: спиноры, алгебры Клиффорда, гиперкомплексные числа.

Аксиоматика действительных чисел $\mathbb{R}$ включает в себя набор аксиом, касающихся операции умножения таких чисел: 1). $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exists!\ a \cdot b =: c \in \mathbb{R}$, 2). $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, 3). $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot b = b \cdot a$, 4). $\forall a \in \mathbb{R}, \exists\, 1 \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$, 5). $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists\ b \in \mathbb{R},\ a \cdot b = 1$, 6). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. При переходе к комплексным числам теряются аксиомы порядка: поле комплексных чисел является неупорядоченным. При переходе к кватернионам потеряется коммутативность умножения. А уже у октонионов мы наблюдаем смену ассоциативности на альтернативность: $\forall a, b \in \mathbb{O},\ a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b,\ (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b)$. При переходе к седенионам альтернативность меняется на слабую альтернативность: $\forall a, b \in \mathbb{S},\ a \cdot (a \cdot b) - (a \cdot a) \cdot b = (b \cdot a) \cdot a - b \cdot (a \cdot a)$ [1, стр. 1(eng)]. До n=16 построение таких алгебр можно было осуществить, используя процедуру удвоения Кэли-Диксона. Если следовать ей и в дальнейшем, то на следующем шаге следует ожидать размерность равную 32. Но вот вопрос, а есть ли слабо альтернативные алгебры между размерностями 16 и 32, и сохраняется ли тождество слабой альтернативности в дальнейшем? Если такие алгебры существуют, то разумно предположить, что их размерность может быть равна 24. То есть, такие алгебры могли бы существовать для всех размерностей, кратных 8. Подобные рассуждения навевают мысль о возможном проявлении периодичности Ботта, которую сформулировал Картан применительно к алгебрам Клиффорда. Таким образом, если указать на связь между алгебрами Клиффорда, спинорной алгеброй и слабо альтернативными алгебрами, то можно научиться строить такие алгебры для n mod 8=0. При этом инициальным шагом индукции является шаг для n=8. По сути,